Cofinanciado por:

MATRIZES, OPERAÇÕES COM MATRIZES E SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES

1. Definição de matriz. Matrizes especiais.

Definição 1.1: Sejam *m* e *n* dois números naturais. Uma **matriz real $m \times n$** é um conjunto de *mn* números reais distribuídos por *m* linhas e *n* colunas do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} \in IR$ para todo o $i \in \{1,2,\dots,m\}$ e para todo o $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Dizemos, neste caso, que a matriz tem **ordem** ou **dimensão** $m \times n$.

Definição 1.2: Cada número que compõe a matriz chama-se **termo**, **elemento** ou **coeficiente** da matriz.

Notação: Abreviadamente pode-se representar a matriz pelo símbolo $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$. Neste caso, o símbolo a_{ij} é chamado **termo geral** da matriz.

Cada elemento da matriz é afetado de dois índices, o **índice de linha** que nos indica a linha a que o elemento pertence e o **índice de coluna** que indica a coluna a que ele pertence:

$$a_{\underset{\downarrow}{i}\ j \to \textit{índice de coluna}}$$

$$\textit{índice de linha}$$

Exemplos 1.3: Consideremos a matriz $A=\begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

É uma matriz de dimensão 3×2, em que $a_{11}=\frac{1}{2}$; $a_{12}=3$; $a_{21}=0$; $a_{22}=5$; $a_{31}=-1$; $a_{32}=\sqrt{2}$.

Definição 1.4: A toda a matriz $m\times 1$, ou seja, a toda a matriz com *m* linhas e *1* coluna chamamos **matriz coluna** e a toda a matriz $1\times n$, ou seja, a toda a matriz com *1* linha e *n* colunas chamamos **matriz linha**.

Uma matriz coluna é da forma $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ e uma matriz linha é do tipo $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

Definição 1.5: Chama-se **matriz nula** $m\times n$ a toda a matriz $m\times n$ com os elementos todos iguais a zero.

Definição 1.6: Chama-se **matriz quadrada** de ordem *n* a uma matriz $n\times n$, ou seja, a uma matriz com *n* linhas e *n* colunas.

Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem *n*. Os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituem a **diagonal principal** de *A* e os elementos $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ constituem a diagonal não principal ou **diagonal secundária** de *A*.

Exemplos 1.7: Dada a matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, a sua diagonal principal é constituída pelos elementos 3, 1 e -5 e a sua diagonal secundária é constituída pelos elementos -1, 1, 0.

Definição 1.8: Uma matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são todos iguais a zero chama-se **matriz diagonal**, isto é, $A=\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ é uma matriz diagonal sse $a_{ij}=0$ para todos os $i, j\in\{1,2,\ldots,n\}$ tais que $i\neq j$.

Exemplos 1.9: A matriz $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal.

A matriz $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é uma matriz diagonal porque o segundo elemento da primeira linha é diferente de zero.

Definição 1.10: À matriz diagonal de ordem n cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a um, chama-se **matriz identidade de ordem n** e denota-se habitualmente por I_n.

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 1.11: Uma matriz quadrada diz-se **triangular superior** se todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Temos então que $A=[a_{ij}]$ é uma matriz triangular superior sse $a_{ij}=0$ para $i>j$.

Exemplo 1.12: A matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é triangular superior.

Definição 1.13: Uma matriz quadrada diz-se **triangular inferior** se todos os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero. Temos então que $A=[a_{ij}]$ é uma matriz triangular inferior sse $a_{ij}=0$ para $i<j$.

Exemplo 1.14: A matriz $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é triangular inferior.

Definição 1.15: Seja *A* uma matriz $m\times n$. Chama-se **transposta de *A*** e denota-se por A^T à matriz $n\times m$ cujas linhas coincidem com as colunas de *A*.

Sendo $A=[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, temos

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{mi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 1.16: Da definição resulta

$$A^{T^T}=\left(A^T\right)^T=A.$$

Exemplos 1.17:

1) Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ temos $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$.

2) A transposta da matriz linha $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\end{bmatrix}$ é a matriz coluna $A^T=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ \vdots\\ a_{1j}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{bmatrix}$.

3) A transposta da matriz identidade de ordem *n* é a matriz identidade de ordem *n*.

Definição 1.17: Uma matriz *A* diz-se **simétrica** se coincide com a sua transposta, isto é, $A=A^T$.

Exemplo 1.18: Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}=A$, logo *A* é simétrica.

Definição 1.19: Uma matriz *A* diz-se **anti-simétrica** sse $A=-A^T$.

Exemplo 1.20: Sendo $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$ temos $A^T=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Como $A=-A^T$, a matriz A é anti-simétrica.

2. Operações com matrizes: propriedades.

2.1: Adição de matrizes

Denotemos por $M_{m\times n}(IR)$ o conjunto de todas as matrizes reais de dimensão $m\times n$.

Definição 2.1: Sejam $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ duas matrizes de $M_{m\times n}(IR)$. Chama-se **soma de *A* com *B*** à matriz $C=[c_{ij}]$ de $M_{m\times n}(IR)$, cujo termo geral é $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$.

Isto é,

$$\begin{aligned} C &= A+B \\ &= [a_{ij}+b_{ij}] \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplos 2.2:

1) Sendo $A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ temos

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 7+(-2) & 3+0 & -2+(-1) \\ -5+2 & 0+(-3) & 1+(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) Sendo $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ não podemos obter $A+B$ porque as matrizes não têm a mesma dimensão.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO:

Sejam $A, B \, e \, C \in M_{m\times n}(IR)$. Então:

(1) $A+B=B+A$ *(comutatividade).*

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ *(associatividade).*

(3) Existe uma matriz nula $O\in M_{m\times n}(IR)$ tal que $A+O=O+A=A$ *(existência de um elemento neutro).*

(4) Existe uma matriz $A^{'}=-A\in M_{m\times n}(IR)$ tal que $A+A^{'}=A'+A=O$ *(existência de um simétrico).*

(5) $(A+B)^T=A^T+B^T$.

2.2: Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição 2.3: Dada uma matriz $A\in M_{m\times n}(IR)$ e um escalar $\alpha\in IR$, chamamos **produto da matriz A pelo escalar** α à matriz $B=\alpha A\in M_{m\times n}(IR)$ cujo termo geral é definido por $b_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Exemplo 2.4: Sendo $A=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\alpha=-3$ temos $\alpha A=-3A=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO ESCALAR:

Sejam $A,B\in M_{m\times n}(IR)$ e $\alpha, \beta\in IR$. Então

(1) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$

(2) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$

(3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Exemplo 2.5: Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$, temos

$$\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B=\frac{1}{3}(A-B)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -4\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/3 & -1/3 & -4/3\\ 0 & 1 & -2/3\end{bmatrix}.$$

2.3: Multiplicação de matrizes

De seguida vamos definir multiplicação de matrizes que é uma operação que a duas matrizes *A* e *B* faz corresponder uma matriz denotada por $A\times B$ ou simplesmente *AB* e que se designa por produto de *A* por *B*.

Vamos ver que o produto *AB* só pode ser definido quando houver uma certa relação entre o número de colunas de *A* e o número de linhas de *B*.

Definição 2.6: Sejam $A=[a_{ij}]$ uma matriz $m\times n$ e $B=[b_{jr}]$ uma matriz $n\times p$. **<u>O produto de *A* por *B*</u>** (por esta ordem) é a matriz $m\times p$ cujo termo geral c_{ir} obtém-se somando os produtos dos elementos da linha *i* da matriz *A* pelos elementos coluna *r* da matriz *B*, isto é,

$$c_{ir}=\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1r}\\ b_{2r}\\ \vdots\\ b_{nr}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1r}+a_{i2}b_{2r}+\cdots+a_{in}b_{nr}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kr}\,.$$

Consequentemente

$$AB=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kp}\\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kp}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kp}\end{bmatrix}$$

Observação: Só podemos multiplicar matrizes quando o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

Exemplo 2.7: 1) Sejam $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 6 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B=\begin{bmatrix}7 & 0 & 4\\ 4 & 3 & 5\\ -1 & 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times 3}$ então

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 6 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix}7 & 0 & 4\\ 4 & 3 & 5\\ -1 & 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times 7+1\times 4+4\times(-1) & 3\times 0+1\times 3+4\times 5 & 3\times 4+1\times 5+4\times 6\\ 6\times 7+0\times 4+5\times(-1) & 6\times 0+0\times 3+5\times 5 & 6\times 4+0\times 5+5\times 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21 & 23 & 41\\ 37 & 25 & 54\end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

2) Sendo *A* e *B* as matrizes do exemplo anterior, não podemos calcular o produto *BA* porque o número de colunas de *B* não coincide com o número de linhas de *A*.

3) Seja $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$ então é possível calcular o produto *AB* e é uma matriz 2×1. De facto $AB=\begin{bmatrix}2\times 1+0\times 3\\ 1\times 1+1\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES:

Sejam A, B e C matrizes de dimensão convenientes e $\alpha \in IR$. Então

(1) $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade).*

(2) $(A+B)C = AC + BC$ e $A(B+C) = AB + AC$ *(distributividade).*

(3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(4) $AI = A$ e $IB = B$ *(existência de elemento neutro).*

(5) $AO = O$ e $OB = O$.

(6) $(AB)^T = B^T A^T$.

Observações: **1)** A multiplicação de matrizes **não é**, em geral, **comutativa**. Isto é, na multiplicação, não se pode mudar a ordem das matrizes.

Por exemplo, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, temos que $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ pelo que $AB \neq BA$.

2) A lei do anulamento do produto $(AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0)$ **não é válida**.

Por exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, no entanto $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3) A lei do corte ($AX = AY$, com $A \neq 0 \Rightarrow X = Y$) **não é válida**.

Basta notar que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e no entanto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Resolução de sistemas de equações lineares

3.1. Matrizes em escada.

Definição 3.1: Uma **matriz em escada de linhas** é uma matriz tal que, por baixo do primeiro elemento não nulo de cada linha, e por baixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas.

Definição 3.2: Numa matriz em escada de linhas, chama-se **pivot** ao primeiro elemento não nulo de cada linha.

Exemplos:

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ é uma matriz em escada com pivots 1, -1 e 1.

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ é uma matriz em escada com pivots 1, -3 e 5.

$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ não é uma matriz em escada.

3.2. Eliminação de Gauss.

Definição 3.3: Dada uma matriz, designam-se por **operações elementares sobre linhas**, as seguintes transformações:

1) Troca de duas linhas *i* e *j* $(L_i \leftrightarrow L_j)$;
2) Multiplicação de uma linha *i* por um número α diferente de zero (αL_i);

Cofinanciado por:

3) Substituição de uma linha j pela que se obtém adicionando-lhe o produto de outra linha i por um número real α $(L_j + \alpha L_i)$.

Definição 3.4: A **condensação** ou **eliminação de Gauss** de uma matriz consiste em efectuar operações elementares sobre linhas de modo a transformar-se a matriz dada numa matriz em escada de linhas.

3.3. Característica de uma matriz.

Definição 3.5: Chama-se **característica** de A, e denota-se por $car(A)$, ao número de linhas não nulas da matriz em escada de linhas que se obtém de A através da sua condensação.

Em síntese temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \underset{\left(\substack{\text{operações}\\ \text{elementares}}\right)}{\rightarrow \cdots \rightarrow} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1k} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2k} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{kk} & \cdots & \bar{a}_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow car(A) = k$$

Nota: Como é óbvio, $car(A) \leq min\{m, n\}$.

Exemplo 3.6:

Calcule a característica das matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&1&0\\2&2&0\\3&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\2&2&0\\3&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{L_3-2L_1\\L_4-3L_1}]{}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow car(A)=2$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&1\\-1&-3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{L_2-2L_1\\L_3+L_1}]{}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&-1\\0&-3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3+L_2]{}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&-1\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow car(B)=3$$

3.4. Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss

Consideremos um sistema de *m* equações lineares a *n* incógnitas:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}\Leftrightarrow Ax=b$$

Na resolução de sistemas de equações lineares vamos considerar a matriz ampliada $[A|b]$, onde A é a **matriz dos coeficientes** do sistema, x é a **matriz das incógnitas** e b é a **matriz dos termos independentes**.

Procedendo à eliminação de Gauss da matriz ampliada $[A|b]$, de modo a obtermos uma matriz em escada de linhas, ficamos com um novo sistema de equações de mais simples resolução.

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$$\underset{\text{operações elementares sobre linhas}}{\underbrace{\rightarrow \cdots \rightarrow}} \left[\begin{array}{cccccc|c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1k} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2k} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{kk} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \bar{b}_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{b}_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{b}_m \end{array}\right]$$

Definição 3.8: Um sistema de equações lineares diz-se **possível determinado** se admitir uma única solução e ele diz-se **possível indeterminado** se admitir uma infinidade de soluções.

Definição 3.9: Chama-se **variável livre** ou **independente** à variável sem pivô e **variável básica** ou **dependente** à variável com pivô.

Exemplos 3.10:

1. Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ -4x + 3y + z = -7 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$.

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -4 & 3 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ y + 7z = 9 \\ 5z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 - 3 + y \\ y = 9 - 7 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$. Logo $S = \left\{ \left(\frac{7}{2}, 2, 1 \right) \right\}$.

3.5. Classificação de sistemas.

O sistema $Ax = b$ de m equações a n incógnitas, pode ser classificado da seguinte forma:

1. Se $car(A) = car([A\,|\,b]) = n$, o sistema é possível determinado.

2. Se $car(A) = car([A\,|\,b]) < n$, o sistema é possível indeterminado.

3. Se $car(A) < car([A\,|\,b])$, o sistema é impossível.

Exercício 3.11: Classifique e resolva, se possível, os seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -7 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - y + 6z = 12 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$.