

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU

ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA
Cálculo e Tratamento de Dados

(CTeSP de Gestão da Segurança no Trabalho e do Ambiente e de Proteção Civil)

1º teste

Duração: 1h00m

29 de outubro de 2018

Não é permitida a consulta de quaisquer apontamentos nem a utilização de máquina de calcular.

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Em caso de fraude, a sua prova será imediatamente anulada.

1. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termo geral $u_n = \frac{2n^2 + 2n}{n} + n$ e $v_n = \frac{u_n}{2n - 1}$ respetivamente.
 - (a) Mostre que (u_n) é uma progressão aritmética e indique a sua razão.
 - (b) O que pode concluir quanto à monotonia da sucessão (u_n) .
 - (c) Calcule a soma $u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$ dos termos da sucessão (u_n) .
 - (d) Mostre que $v_n = \frac{3n + 2}{2n - 1}$.
 - (e) Verifique se 2 é, ou não, termo da sucessão (v_n) e em caso afirmativo, indique a sua ordem.
 - (f) Determine a diferença entre o termo de ordem $n + 1$ e o termo de ordem n da sucessão (v_n) . O que pode concluir sobre a sua monotonia?
 - (g) Calcule $\lim \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5n^2 - n + 4} + v_n \right)$.
2. Uma certa empresa que produz artigos de proteção e segurança teve no seu primeiro ano de existência um volume de vendas de 50 mil euros. Estudos efectuados pelo departamento financeiro da empresa permitiram concluir que o seu volume de vendas tem duplicado anualmente.
 - (a) Determine o volume de vendas no 2º e no 3º ano.
 - (b) Determine o termo geral da sucessão (a_n) associada a este problema.
 - (c) Calcule o volume total de vendas S_5 dos 5 primeiros anos.

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu

3. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{3^n}$.

4. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f(x)}$.

- (a) Represente graficamente a função f .
- (b) Resolva analiticamente a inequação $f(x) < 0$.
- (c) Determine o domínio da função g .
- (d) Determine os zeros da função g .



INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU

ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA

Cálculo e Tratamento de Dados

(CTeSP de Proteção Civil)

2º teste

Duração: 1h00m

13 de dezembro de 2018

Não é permitida a consulta de quaisquer apontamentos nem a utilização de máquina de calcular gráfica.

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Em caso de fraude, a sua prova será imediatamente anulada.

1. (a) (1.5 val) Partindo da Fórmula Fundamental da Trigonometria, mostre que

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}.$$

- (b) (1.25 val) Recorra à linha anterior para determinar o valor de $\cos(\alpha)$ sabendo que $\tan(\alpha) = 2$.

2. (1.25 val) Num campo de tiro, um prato foi lançado segundo um ângulo de 32° com o solo. A bala atingiu o prato depois de este ter percorrido 28 m. A que distância do solo foi atingido o prato?

3. Considere a função g definida por $g(x) = x^2 + 2x - 8$.

- (a) (1 val) Determine os zeros da função g .
 (b) (1 val) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa a função g ?
 (c) (1 val) Represente graficamente a função g .
 (d) (1 val) Resolva, analiticamente, a inequação $g(x) < 0$.

4. Considere a função $f(x) = -4 + \log_3\left(5 - \frac{x}{2}\right)$

- (a) (1.25 val) Determine o domínio da função.
 (b) (1.5 val) Resolva a equação $f(x) = -3$.

5. (2.5 val) Resolva a seguinte equação: $-2^{x-1} \log(x-2) = -2 \log(x-2)$.



6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (a) (1.5 val) Ordene, se possível, de várias maneiras as matrizes anteriores de tal modo que o produto das três esteja definido.
- (b) (2 val) Calcule a matriz $M = AA^T$.
- (c) (1 val) Averigue se a matriz M é simétrica.
- (d) (0.75 val) Averigue se a matriz M é ortogonal.
- (e) (1.5 val) Determine a matriz X tal que $X + 2I = M$.



INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU
 ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA
Cálculo e Tratamento de Dados
 (CTeSP de Proteção Civil)

Exame Normal

23 de Janeiro de 2019

Duração: 1h30m

Não é permitida a consulta de quaisquer apontamentos nem a utilização de máquina de calcular gráfica.
 Justifique convenientemente todas as suas respostas.
 Em caso de fraude, a sua prova será imediatamente anulada.

1. Define-se $u_n = \frac{2n-5}{n+3}$.
 - (a) **(1.75 val)** Estude a monotonia da sucessão (u_n) .
 - (b) **(1.5 val)** Determine a menor ordem do termo da sucessão (u_n) que não é inferior a 1,5.
 - (c) **(1.75 val)** Calcule $\lim \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + u_n \right)$.
2. Considere a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{5}{2^{n-1}}$.
 - (a) **(1.25 val)** Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica e indique a sua razão.
 - (b) **(1.25 val)** Determine a expressão da soma, S_n , dos n primeiros termos da sucessão (v_n) .
 Se não respondeu, use $S_n = \frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$.
 - (c) **(1 val)** Calcule $\lim (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$.
3. Considere a função f real de variável real definida por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$.
 - (a) **(0.75 val)** Indique o domínio de f .
 - (b) **(1.25 val)** Mostre que $f(x) = 3 + \log_2 x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.
 - (c) **(1 val)** Determine, recorrendo à expressão obtida na alínea (b), a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y = 8$.
4. Considere as funções f e g reais de variável real definidas por: $f(x) = 2x^2 - x - 3$ e $g(x) = 3x + 2$.
 - (a) **(1.25 val)** Determine os zeros das funções f e g .
 - (b) **(0.75 val)** Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f .
 - (c) **(1 val)** Represente graficamente, e no mesmo sistema de eixos, as funções f e g .
 - (d) **(0.75 val)** Define-se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Indique o domínio de h .



5. **(1 val)** No jardim da família Coelho, encontra-se um balancé, com uma trave de $2.8m$ de comprimento. Quando uma das cadeiras está em baixo, a trave do balancé forma um ângulo de 40° com o solo. Determine, em metros, a altura máxima, a que a outra cadeira pode estar.

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$.

(a) **(0.75 val)** Averigue, recorrendo à definição, se a matriz A é ou não simétrica.

(b) **(1.25 val)** Mostre que B é a matriz inversa de A .

7. **(1.75 val)** Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule, se possível, a matriz $D = (C - 2A)B$.



INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU
 ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA
Cálculo e Tratamento de Dados
 (CTeSP de Proteção Civil)

Exame de recurso

11 de Fevereiro de 2019

Duração: 1h30m

Não é permitida a consulta de quaisquer apontamentos nem a utilização de máquina de calcular gráfica.
Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Em caso de fraude, a sua prova será imediatamente anulada.

1. Considere a sucessão $(a_n)_{n \geq 1}$ de termo geral $a_n = \frac{2}{3^n}$ e seja $(b_n)_{n \geq 1}$ a progressão aritmética de 2º termo 5 e de razão 2.
 - (a) **(1.5 val)** Mostre que (a_n) é uma progressão geométrica, indique a sua razão e a sua monotonia.
 - (b) **(0.75 val)** Determine o termo geral b_n .
Nota: Se não respondeu a esta alínea, considere nas alíneas seguintes $b_n = 2n + 1$.
 - (c) **(0.5 val)** Calcule os termos b_4 e b_{10} .
 - (d) **(0.75 val)** Calcule a soma $b_4 + \dots + b_{10}$, usando só os termos obtidos na alínea anterior.
 - (e) Define-se $u_n = \frac{b_n}{n+2}$.
 - i. **(1.75 val)** Estude a monotonia da sucessão (u_n) .
 - ii. **(1.5 val)** Determine a menor ordem do termo da sucessão (u_n) que é superior a 1,7.
 - iii. **(1.75 val)** Calcule $\lim [u_n + a_n(2^{n-1})]$.
2. Considere a função f real de variável real definida por $f(x) = \log_2(4x^2) + \log_2 x$.
 - (a) **(0.75 val)** Indique o domínio de f .
 - (b) **(1.25 val)** Mostre que $f(x) = 2 - \log_2 x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.
 - (c) **(1 val)** Determine, recorrendo à expressão obtida na alínea (b), a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y = 4$.
3. Considere as funções f e g reais de variável real definidas por: $f(x) = x^2 - 6x + 9$ e $g(x) = 3x$.
 - (a) **(1.25 val)** Determine os zeros das funções f e g .
 - (b) **(0.75 val)** Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f .
 - (c) **(1 val)** Represente graficamente, e no mesmo sistema de eixos, as funções f e g .
 - (d) **(0.75 val)** Resolva a equação $f(x) = g(x)$.



4. **(1 val)** No jardim da família Martins, encontra-se um balancé, que quando uma das cadeiras está em baixo, a trave do balancé forma um ângulo de 40° com o solo. Sabendo que a altura máxima a que a outra cadeira pode estar é de 3 metros. Determine, em metros, o comprimento da trave.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) **(0.75 val)** Averigue, recorrendo à definição, se a matriz A é ou não anti-simétrica.
 (b) **(1.25 val)** Mostre que B é a matriz inversa de A .

6. **(1.75 val)** Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule, se possível, a matriz $D = (C - 2A)B$.